Théorème de Levy et TCL

Geoffrey Deperle

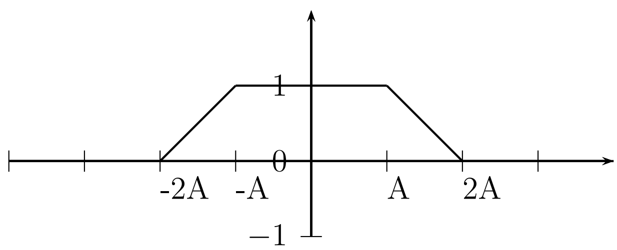
Leçons associées :
— 250 : Transformation de Fourier. Applications.
— 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Définition 1. On dit qu'une suite de variables aléatoires réelles (X_n) converge en loi vers X si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on a
$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

Lemme 1. *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle.*
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$
avec $\mathcal{C}_0 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0\}$

Preuve :
($\Longrightarrow$) Comme $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.
($\Longleftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $\mathbb{P}_X(\{x; |x| > A\}) \leq \varepsilon$.
Posons φ :



de sorte que $\int (1-\varphi)\mathrm{d}\mathbb{P}_X \leq \mathbb{P}_X(\{x; |x| > A\}) \leq \varepsilon$.
Soit $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$,
$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\mathrm{d}\mathbb{P}_X}_{\leq ||f||_\infty \int (1-\varphi)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}} + \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}} f\varphi \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi \mathrm{d}\mathbb{P}_X\right]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Or,
$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} &\leq ||f||_\infty \left(1 - \int \varphi \mathrm{d}\mathbb{P}_X\right) \qquad \text{car } \varphi \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}) \\ &\leq \varepsilon ||f||_\infty\end{aligned}$$

D'où $\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mathbb{P}_X\right| \leq 2\varepsilon||f||_\infty$.
D'où $|\mathbb{E}[f(X_n) - f(X)]| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Théorème. *Soit X et et (X_n) des variables aléatoires réelles, on a équivalence entre*
(i) (X_n) converge en loi vers X
(ii) La suite (φ_{X_n}) des fonctions caractéristiques des X_n converge simplement vers φ_X.

Preuve : $(i) \implies (ii)$ Vrai car $x \mapsto e^{ixt}$ est borné pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$(ii) \implies (i)$
Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), ||f-g||_\infty \leq \varepsilon$.
Or, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ donc il existe $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $g = \widehat{\varphi}$.

$$|\mathbb{E}[f(X_n) - f(X)]| \leq \underbrace{|\mathbb{E}[(f-g)(X_n)]|}_{\leq ||f-g||_\infty \leq \varepsilon} + \underbrace{|\mathbb{E}[(f-g)(X)]}_{\leq ||f-g||_\infty \leq \varepsilon} + |\mathbb{E}[g(X_n) - g(X)]|$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}\left[\int e^{itX_n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right] &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}[e^{itX_n}]\,\mathrm{d}t \quad \text{par théorème de Fubini} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}[e^{itX}]\,\mathrm{d}t \quad \text{par théorème de convergence dominé} \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{itX}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \mathbb{E}[g(X)]
\end{aligned}$$

D'où $\limsup_{n\to+\infty} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq 2\varepsilon$. □

Lemme 2. *Soit (z_n) une suite de nombres complexes convergeant vers $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$$

Preuve : On note Log la détermination principale du logarithme complexe.
Comme $\frac{z_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{z_n}{n} \in \mathrm{D}(0,1)$ donc

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp\left(n\mathrm{Log}\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{z_n}{n} + o\left(\frac{z_n}{n}\right)\right)\right) = \exp(z_n + o(z_n))$$

D'où $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$ □

Théorème. *Soit (X_n) une suite de variable aléatoire réelle indépendante et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. En notant $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, on a*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Preuve : Sans perte de généralité, supposons $\sigma = 1$ et $\mu = 0$. On doit montrer que $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)$ converge vers $e^{\frac{-t^2}{2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Posons $\varphi = \varphi_{X_1}$, φ est de classe C^2 car $X_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ avec de plus

$$\begin{cases} \varphi'(0) & = i\mathbb{E}[X_1] = 0 \\ \varphi''(0) & = \mathbb{E}[-X_1^2] = -1 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{X_n}{\sqrt{n}}}\right] &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{it\frac{X_1}{\sqrt{n}}}\right] \qquad \text{par indépendance des } X_k \\ &= \left(\mathbb{E}\left[e^{it\frac{X_1}{\sqrt{n}}}\right]\right)^n \\ &= \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

et on conclut avec le lemme. □

Références

[1] Claude Zuily Hervé Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2013.

[2] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités 2.* Cassini, 2009.